

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εξετάσεις 12 - 2 - 2013

(Θέματα & Λύσεις)

1) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|^k} \right)$$

για $k = 1, 2, \frac{1}{2}$.

Λύση: Ο αριθμητής ισούται με $\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} = \frac{(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x})(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}} = \frac{4x}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}}$. Οπότε έχουμε:

1. Για $k = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{x} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4x}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})} \right) &= 2. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{-x} \right) = \\ - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4x}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})} \right) &= -2. \end{aligned}$$

Επομένως το όριο δεν υπάρχει.

2. Για $k = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{x^2} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \frac{4x}{(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \frac{4}{(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})} \right) = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|^2} \right) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|^2} \right) = -\infty$.
Επομένως το όριο δεν υπάρχει.

3. Για $k = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|^{1/2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{1/2} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|} \right).$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{1/2} = 0$ και τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|}$ στο

0 είναι πραγματικοί αριθμοί, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{|x|^{1/2}} \right) = 0$.

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+4)(2x+1)} dx$$

Λύση: Έχουμε γενικευμένο ολοκλήρωμα οπότε

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(x+4)(2x+1)} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{(x+4)(2x+1)} dx$$

Αναλύουμε την προς ολοκλήρωση συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(x+4)(2x+1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1) + B(x+4)}{(x+4)(2x+1)} \Rightarrow 1 \equiv (2A+B)x + (A+4B).$$

Οπότε $2A+B=0$ και $A+4B=1$. Από αυτές τις σχέσεις βρίσκουμε $A = -\frac{1}{7}$, $B = \frac{2}{7}$.

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{(x+4)(2x+1)} dx &= \int_0^a \left[-\frac{1}{7} \frac{1}{x+4} + \frac{2}{7} \frac{1}{2x+1} \right] dx = \left[-\frac{1}{7} \ln|x+4| + \frac{1}{7} \ln|2x+1| \right]_0^a = \\ &= -\frac{1}{7} [\ln(a+4) - \ln 4] + \frac{1}{7} [\ln(2a+1)] = \frac{1}{7} \ln \left(\frac{2a+1}{a+4} \right) + \frac{1}{7} \ln 4. \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2a+1}{a+4} = 2$, έχουμε

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{7} \ln \left(\frac{2a+1}{a+4} \right) + \frac{1}{7} \ln 4 \right] = \frac{1}{7} \ln 2 + \frac{1}{7} \ln 4 = \frac{3}{7} \ln 2$$

3) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο για σκουπίδια με βάση ακτίνας r τοιχώματα κυλινδρικά ύψους h και στην κορυφή το καπάκι να έχει σχήμα ημισφαιρίου ακτίνας r . Η επιφάνεια ολόκληρου του δοχείου είναι σταθερή και ίση με A . Να υπολογισθεί ο λόγος του r με το h για να είναι μέγιστη η χωρητικότητα του δοχείου.

Λύση: Η επιφάνεια είναι

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2$$

ή

$$h(r) = \frac{A}{2\pi r} - \frac{3r}{2}$$

και ο όγκος είναι

$$V(r) = \frac{Ar}{2} - \frac{5\pi r^3}{6}$$

και το

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{2} - \frac{5\pi r^2}{2} = 0 \Rightarrow A = 5\pi r^2$$

Επιστρέφοντας στην αρχική σχέση $A = 3\pi r^2 + 2\pi h r$ καταλήγουμε στη σχέση $h = r$ που εύκολα δείχνουμε ότι οδηγεί τον όγκο σε μέγιστη τιμή.

4) (α) Να υπολογισθεί ο όγκος μιας πυραμίδας με ορθογώνια βάση μήκους l και ύψους h
 (β) Να υπολογισθεί το μήκος της καμπύλης $y = (e^x + e^{-x})/2$ για $0 \leq x \leq b$.

Λύση: (α) Αν κόψουμε τη πυραμίδα σε ένα τυχαίο ύψος z με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση θα δημιουργηθεί ένα τετράγωνο με ακμή x . Κάνοντας χρήση των όμοιων τριγώνων θα έχουμε ότι

$$\frac{h}{l/2} = \frac{h-z}{x/2}$$

άρα $x = h - (l/h)z$ (βλέπε Σχήμα) και ο στοιχειώδης όγκος $dV = x^2 dz$

$$V = \int_0^h (h - (h/l)z)^2 dz = \frac{l^2 h}{3}$$

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$$

και $y'^2 + 1 = y^2$ άρα

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx = (e^b - e^{-b})/2$$

5) Βαρυτικά κύματα κοσμολογικής προέλευσης διαδίδονται σύμφωνα με την εξίσωση

$$\Sigma = A\mathcal{J}_2(x) + B\mathcal{N}_2(x),$$

όπου οι A και B είναι σταθερές, ενώ

$$\mathcal{J}_2(x) = \frac{1}{x} \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x} \right]$$

και

$$\mathcal{N}_2(x) = \frac{1}{x} \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \cos x + \frac{3 \sin x}{x} \right].$$

Στην περίπτωση μεγάλου μήκους κύματος ικανοποιείται η συνθήκη $x \ll 1$. Να αποδειχθεί ότι τότε η αρχική εξίσωση διάδοσης προσεγγίζεται από την

$$\Sigma = A_1 x^2 + B_1 x^{-3}.$$

όπου οι A_1 και B_1 είναι σταθερές.

Λύση: Με χρήση των αναπτυγμάτων McLaurin για τις συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$ έχουμε

$$\mathcal{J}_2(x) = \frac{1}{x} \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) - \frac{3}{x} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \right]$$

και

$$\mathcal{N}_2(x) = \frac{1}{x} \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + \frac{3}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \right].$$

Με δεδομένο ότι $x \ll 1$ συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{J}_2(x) \simeq x^2/15$ και $\mathcal{N}_2(x) \simeq 3/x^3$ και καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση.

6) Να προσδιορισθεί το εμβαδόν της τομής του κύκλου $r = 3/2$ και του καρδιοειδούς $r = 1 + \cos \vartheta$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\vartheta \in [0, 2\pi)$ και στις δύο περιπτώσεις. Ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r = 3/2$, ενώ το καρδιοειδές τέμνει τους άξονες στα σημεία $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ και $(0, -1)$. Επίσης, οι δύο καμπύλες τέμνονται και τα σημεία τομής αντιστοιχούν σε πολικές γωνίες $\vartheta = \pm\pi/3$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = 2(E_1 + E_2)$ όπου

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{3}{2} \right)^2 d\vartheta = \frac{3\pi}{8}$$

και

$$E_2 = \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} (1 + \cos \vartheta)^2 d\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Άρα, τελικά,

$$E = \frac{7\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$